整数の性質　演習問題

23

もとの 3 桁の整数の一の位の数を a，百の位の数を b とすると，

もとの整数は $100b+50+a$

もとの整数の一の位と百の位を入れかえた数は $100a+50+b$ と表される。

ただし，いずれも 3 桁の整数だから，$1\leq a\leq 9$，$1\leq b\leq 9$ である。

もとの整数について

12 の倍数すなわち 3 の倍数かつ 4 の倍数である。

3 の倍数であることから，各位の数の和が 3 の倍数である。

よって，$a+b+5=3k$ （k は自然数）　・・・①

4 の倍数であることから，下 2 桁が 4 の倍数である。

よって，$50+a=4l$ （l は自然数）　・・・②

一の位と百の位を入れかえた数について

15 の倍数すなわち 3 の倍数かつ 5 の倍数である。

3 の倍数であることについては①のとおり。

5 の倍数であることから，一の位の数は 0 または 5 である。

これと $1\leq b\leq 9$ より，$b=5$　・・・③

①，③より，$a+10=3k$　すなわち $a=3k-10=3(k-4)+2$

②より，$a=4l-50=4(l-13)+2$

よって，a を 3 で割った余りも 4 で割った余りも 2 である。

これと $1\leq a\leq 9$ より，$a=2$

ゆえに，もとの整数は百の位の数が 5，十の位の数が 5，一の位の数が 2

すなわち 552

24

$\dfrac{n}{6}=\dfrac{n}{2\cdot 3}$ より，$n=2\cdot 3\cdot k$ （k は自然数）　・・・①

$\dfrac{n^2}{196}=\left(\dfrac{n}{14}\right)^2=\left(\dfrac{n}{2\cdot 7}\right)^2$ より，$n=2\cdot 7\cdot l$ （l は自然数）　・・・②

①かつ②より，$n=2\cdot 3\cdot 7\cdot m$ （m は自然数）

これを $\dfrac{n^3}{441}$ に代入すると，

$$\frac{(2\cdot 3\cdot 7\cdot m)^3}{441}=\frac{2^3\cdot 3^3\cdot 7^3\cdot m^3}{3^2\cdot 7^2}$$
$$=2^3\cdot 3\cdot 7\cdot m^3$$

よって，m の最小値は 1

ゆえに，$n=2\cdot 3\cdot 7\cdot 1=42$

25

条件を満たす自然数を n とすると，

$705 \equiv 25 \pmod{n}$ より， $705 - 25 \equiv 0 \pmod{n}$ すなわち $680 \equiv 0 \pmod{n}$

$1453 \equiv 25 \pmod{n}$ より， $1453 - 25 \equiv 0 \pmod{n}$ すなわち $1428 \equiv 0 \pmod{n}$

$4785 \equiv 25 \pmod{n}$ より， $4785 - 25 \equiv 0 \pmod{n}$ すなわち $4760 \equiv 0 \pmod{n}$

よって， n は $680, 1428, 4760$ の公約数である。

したがって，求める自然数は $680, 1428, 4760$ の最大公約数であり，

$680 = 2^3 \cdot 5 \cdot 17$， $1428 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17$， $4760 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$ から，

その数は $2^2 \cdot 17 = 68$

26

$24511 = 11580 \cdot 2 + 1351$

$11580 = 1351 \cdot 8 + 772$

$1351 = 772 \cdot 1 + 579$

$772 = 579 \cdot 1 + 193$

$579 = 193 \cdot 3$

よって，ユークリッドの互除法により，24511 と 11580 の最大公約数は 193

27

$\sqrt{n^2 + 56} = k$ （k は自然数）とすると， $n^2 + 56 = k^2$ より， $k^2 - n^2 = 56$

すなわち $(k-n)(k+n) = 2^3 \cdot 7$

k, n は自然数だから， $0 < k - n < k + n$

また， $k - n = a,\ k + n = b$ とすると， $k = \dfrac{a+b}{2},\ n = \dfrac{-a+b}{2}$ より， a と b の偶奇が一致する。

よって， $(k-n,\ k+n) = (2,\ 28), (4,\ 14)$

ゆえに， $n = 5, 13$

28

(B)において， $b = 36b',\ c = 36c'$ （$b',\ c'$ は互いに素）とおくと，

$36b'c' = 1620$ より， $b'c' = 45$

また， $b < c$ より， $b' < c'$

よって， $(b',\ c') = (1,\ 45), (5,\ 9)$

$(b',\ c') = (1,\ 45)$ のとき

$b = 36 = 2^2 \cdot 3^2$

また， a, b の最小公倍数は，(C)より， $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

よって， $a = 2^4 \cdot 3^k \cdot 5$ （$k = 0, 1, 2$）

したがって， a の最小値は $2^4 \cdot 3^0 \cdot 5 = 80$ となり， $a < b$ を満たさない。

ゆえに，不適

$(b',\ c')=(5,\ 9)$のとき

$b=36\cdot 5=2^2\cdot 3^2\cdot 5$，　$c=36\cdot 9=2^2\cdot 3^4$

$a,\ b$ の最小公倍数は$720=2^4\cdot 3^2\cdot 5$ より，　$a=2^4\cdot 3^l$　（$l=0,\ 1,\ 2$）

これと $a,\ b,\ c$ の最大公約数は，(A)より，　$12=2^2\cdot 3^1$であることから，　$l=1$

よって，　$a=2^4\cdot 3^1=48$

これは$a<b$ を満たす。

ゆえに，　$(a,\ b,\ c)=(48,\ 180,\ 324)$

以上より，　$(a,\ b,\ c)=(48,\ 180,\ 324)$

29

解法 1

条件を満たすある自然数を n とすると，　n は負でない適当な整数 $x,\ y,\ z$ を用いて

$5x+2$　・・・①　または$7y+4$ または$11z+8$ と表せるから，　$5x+2=7y+4=11z+8$

すなわち$\begin{cases}5x=7y+2\\5x=11z+6\end{cases}$

$5x=7y+2$ の一般解

$x=\dfrac{7y+2}{5}=\dfrac{5y+2y+2}{5}=y+\dfrac{2(y+1)}{5}$ より，　$y=4$ のとき $x=6$

これを $5x=7y+2$ に代入すると，　$5\cdot 6=7\cdot 4+2$

これと $5x=7y+2$ の差をとると，　$5(x-6)=7(y-4)$

5 と 7 は互いに素だから，　$x-6=7k,\ y-4=5k$

よって，　$x=7k+6$　・・・②　$y=5k+4$

ただし，　$x,\ y$ は負でない整数だから，　k は 0 以上の整数である。

$5x=11z+6$ の一般解

$x=\dfrac{11z+6}{5}=\dfrac{5(2z+1)+z+1}{5}=2z+1+\dfrac{z+1}{5}$ より，　$z=4$ のとき $x=10$

これを $5x=11z+6$ に代入すると，　$5\cdot 10=11\cdot 4+6$

これと $5x=11z+6$ の差をとると，　$5(x-10)=11(z-4)$

5 と 11 は互いに素だから，　$x-10=11l,\ z-4=5l$

よって，　$x=11l+10$　・・・③　$z=5l+4$

ただし，　$x,\ z$ は負でない整数だから，　l は 0 以上の整数である。

②＝③より，　$7k+6=11l+10$

したがって，　$k=\dfrac{11l+4}{7}=\dfrac{7l+4l+4}{7}=l+\dfrac{4(l+1)}{7}$

これと $k,\ l$ は 0 以上の整数であることから，　l の最小値は 6

これを③に代入することにより，　x の最小値は$11\cdot 6+10=76$

さらにこれを①に代入することにより，求める最小の自然数は$5\cdot 76+2=382$

解法 2

条件を満たすある自然数を n とすると，n は適当な自然数 x, y, z を用いて

$n=5x-3$ または $n=7y-3$ または $n=11z-3$ と表せるから，$n+3=5x=7y=11z$

よって，$n+3$ は 5,7,11 の正の公倍数である。

したがって，n が最小のとき $n+3$ は 5,7,11 の最小公倍数となる。

これと 5,7,11 の最小公倍数は $5\cdot7\cdot11=385$ であることから，

求める最小の自然数は $385-3=382$

30

(1)

3 桁の 8 進数の最小値を 2 進法で表したときの桁数

$$\begin{aligned}100_{(8)}&=1\cdot8^2\\&=1\cdot\left(2^3\right)^2\\&=1\cdot2^6\\&=1\cdot2^6+0\cdot2^5+0\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0\end{aligned}$$

よって，2 進法では 7 桁の数

3 桁の 8 進数の最大値を 2 進法で表したときの桁数

$$\begin{aligned}777_{(8)}&=1000_{(8)}-1_{(8)}\\&=8^3-1\\&=\left(2^3\right)^3-1\\&=2^9-1\\&=(2-1)\left(2^8+2^7+2^6+\cdots+1\right)\\&=2^8+2^7+2^6+\cdots+1\\&=1\cdot2^8+1\cdot2^7+1\cdot2^6+\cdot+1\cdot2^0\end{aligned}$$

よって，2 進法では 9 桁の数

ゆえに，7, 8, 9 桁

(2)

n 桁の 8 進数の最小値を 10 進法で表すと 8^{n-1} である。

これと

$$\begin{aligned}8^{n-1}&=\left(2^3\right)^{n-1}\\&=2^{3n-3}\\&=1\cdot2^{3n-3}+0\cdot2^{3n-2}+0\cdot2^{3n-1}+\cdots+0\cdot2^0\end{aligned}$$

より，

n 桁の 8 進数の最小値は 2 進法では $3n-2$ 桁の数となる。

n 桁の 8 進数の最大値を 10 進法で表すと 8^n-1 である。
これと

$$
\begin{aligned}
8^n-1&=\left(2^3\right)^n-1\\
&=2^{3n}-1\\
&=(2-1)\left(2^{3n-1}+2^{3n-2}+2^{3n-3}+\cdots+1\right)\\
&=2^{3n-1}+2^{3n-2}+2^{3n-3}+\cdots+1\\
&=1\cdot 2^{3n-1}+1\cdot 2^{3n-2}+1\cdot 2^{3n-3}+\cdots+1\cdot 2^0
\end{aligned}
$$

より，
n 桁の 8 進数の最大値は 2 進法では $3n$ 桁の数となる。
よって，n 桁の 8 進数を 2 進法で表すときの桁数は $3n-2,\ 3n-1,\ 3n$ 桁

31

解法 1

$3a+7b=(2a+5b)\cdot 1+a+2b$

$2a+5b=(a+2b)\cdot 2+b$

$a+2b=b\cdot 2+a$

よって，ユークリッドの互除法により，
$3a+7b$ と $2a+5b$ の最大公約数は a と b の最大公約数に等しい。
これと $a,\ b$ が互いに素な自然数であることから，
$3a+7b$ と $2a+5b$ の最大公約数は 1 すなわち $3a+7b$ と $2a+5b$ は互いに素である。
これと $2a+5b>1$ より，$\dfrac{3a+7b}{2a+5b}$ は既約分数である。

解法 2

$3a+7b$ と $2a+5b$ の最大公約数を g とすると，互いに素な自然数 m,n を用いて，

$3a+7b=mg$　・・・①

$2a+5b=ng$　・・・②

と表されるから，
①×5－②×7 より，$a=(5m-7n)g$
②×3－①×2 より，$b=(-2m+3n)g$
よって，g は a と b の正の公約数でもある。
一方，$a,\ b$ は互いに素な自然数だから，正の公約数は 1 だけである。
ゆえに，$3a+7b$ と $2a+5b$ は互いに素である。
これと $2a+5b>1$ より，$\dfrac{3a+7b}{2a+5b}$ は既約分数である。

32

500 より小さい 3 桁の自然数を n とすると，

整数 $a,\ b,\ c$ を用いて $n=100a+10b+c\ (1\leq a\leq 4,\ 0\leq b\leq 9,\ 0\leq c\leq 9)$ と表せるから，

$$
\begin{aligned}
n^2&=(100a+10b+c)^2\\
&=10000a^2+100b^2+c^2+2000ab+20bc+200ca\\
&=a^2\cdot 10^4+2ab\cdot 10^3+\left(2ca+b^2\right)\cdot 10^2+2bc\cdot 10+c^2
\end{aligned}
$$

下 3 桁は 10^2 以下の位の数だから，$\left(2ca+b^2\right)\cdot 10^2+2bc\cdot 10+c^2$ ・・・① について，

その下 3 桁が 329 となるような $a,\ b,\ c$ を求める。

まず，下 3 桁 329 の一の位の数 9 は c^2 の一の位の数だから，$c=3,\ 7$ と決まる。

$c=3$ のとき

①に $c=3$ を代入すると，$\left(6a+b^2\right)\cdot 10^2+6b\cdot 10+9$ ・・・②

下 3 桁 329 の 2 は $6b$ の一の位の数だから，$b=2,\ 7$

$b=2$ のとき

②に $b=2$ を代入し，整理すると，

$$
\begin{aligned}
(6a+4)\cdot 10^2+12\cdot 10+9&=(6a+4)\cdot 10^2+(10+2)\cdot 10+9\\
&=(6a+5)\cdot 10^2+2\cdot 10+9
\end{aligned}
$$

下 3 桁 329 の 3 は $6a+5$ の一の位の数だから，$a=3$

よって，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 2,\ 3)$

$b=7$ のとき

②に $b=7$ を代入し，整理すると，

$$
\begin{aligned}
(6a+49)\cdot 10^2+42\cdot 10+9&=(6a+49)\cdot 10^2+(4\cdot 10+2)\cdot 10+9\\
&=(6a+49+4)\cdot 10^2+2\cdot 10+9\\
&=(6a+53)\cdot 10^2+2\cdot 10+9\\
&=(6a+5\cdot 10+3)\cdot 10^2+2\cdot 10+9\\
&=5\cdot 10^3+(6a+3)\cdot 10^2+2\cdot 10+9
\end{aligned}
$$

下 3 桁 329 の 3 は $6a+3$ の一の位の数である。

ところが $1\leq a\leq 4$ より，これを満たす a は存在しない。

よって，解なし

$c=7$ のとき

①に $c=7$ を代入し，整理すると，

$$
\begin{aligned}
\left(14a+b^2\right)\cdot 10^2+14b\cdot 10+49&=\left\{(10+4)a+b^2\right\}\cdot 10^2+\{(10+4)b\}\cdot 10+4\cdot 10+9\\
&=10^3+\left(4a+b^2\right)\cdot 10^2+b\cdot 10^2+4b\cdot 10+4\cdot 10+9\\
&=1\cdot 10^3+\left(4a+b^2+b\right)\cdot 10^2+4(b+1)\cdot 10+9
\end{aligned}
$$

よって，$\left(4a+b^2+b\right)\cdot 10^2+4(b+1)\cdot 10+9$ ・・・③ の下 3 桁が 329 である。

下 3 桁 329 の 2 は $4(b+1)$ の一の位の数だから，$b=2,\ 7$

$b=2$ のとき

③に $b=2$ を代入し，整理すると，

$$(4a+6)\cdot 10^2+12\cdot 10+9=(4a+6)\cdot 10^2+(10+2)\cdot 10+9$$
$$=(4a+7)\cdot 10^2+2\cdot 10+9$$

下 3 桁 329 の 3 は $4a+7$ の一の位の数だから， $a=4$

よって， $(a,\ b,\ c)=(4,\ 2,\ 7)$

$b=7$ のとき

③に $b=7$ を代入し，整理すると，

$$(4a+56)\cdot 10^2+32\cdot 10+9=(4a+5\cdot 10+6)\cdot 10^2+(3\cdot 10+2)\cdot 10+9$$
$$=(4a+5\cdot 10+6+3)\cdot 10^2+2\cdot 10+9$$
$$=5\cdot 10^3+(4a+9)\cdot 10^2+2\cdot 10+9$$

下 3 桁 329 の 3 は $4a+9$ の一の位の数だから， $a=1$

よって， $(a,\ b,\ c)=(1,\ 7,\ 7)$

以上より，条件を満たす数は177, 323, 427

33

(1)

$x=90x'$, $y=90y'$ （x', y' は互いに素）とすると，

条件より， $1\cdot\frac{x}{3}+3\cdot\frac{y}{4}=360$ だから， $\frac{90x'}{3}+\frac{3\cdot 90y'}{4}=360$

よって， $4x'+9y'=48$

解法 1

$4x'+9y'=48$ より， $x'=\frac{48-9y'}{4}=12-\frac{9y'}{4}$

x', y' は自然数だから， $y'=4k$ （k は自然数）とおくと， $x'=12-9k$ より， $k=1$

よって， $(x',\ y')=(12-9\cdot 1,\ 4\cdot 1)=(3,\ 4)$

ゆえに， $(x,\ y)=(90\cdot 3,\ 90\cdot 4)=(270,\ 360)$

解法 2

$4x'+9y'\equiv 48\ (\mathrm{mod}\ 4)$， $4x'+9y'\equiv 4x'+8y'+y'\equiv y'\ (\mathrm{mod}\ 4)$， $48\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ より， $y'\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$

よって， $y'=4k$ （k は自然数）

これを $4x'+9y'=48$ に代入し， x' を求めると，

$$x'=\frac{48-9\cdot 4k}{4}=12-9k \quad (k \text{ は自然数})$$

x' は自然数だから， $k=1$

よって， $(x',\ y')=(12-9\cdot 1,\ 4\cdot 1)=(3,\ 4)$

ゆえに， $(x,\ y)=(90\cdot 3,\ 90\cdot 4)=(270,\ 360)$

(2)

$x=60a,\ y=60b,\ z=60c$ （$a,\ b,\ c$ は自然数）とおくと，

条件より，$1\cdot\dfrac{x}{3}+3\cdot\dfrac{y}{4}+1\cdot\dfrac{z}{5}=360$ だから，$\dfrac{60a}{3}+\dfrac{3\cdot 60b}{4}+\dfrac{60c}{5}=360$

よって，$\dfrac{a}{3}+\dfrac{3b}{4}+\dfrac{c}{5}=6$ より，$5(4a+9b)=12(30-c)$

5 と 12 は互いに素だから，$4a+9b=12m,\ 30-c=5m$ （m は自然数）

$4a+9b=12m$ について

$4a+9b=12m$ より，$a=3m-\dfrac{9b}{4}$

$a,\ b$ は自然数だから，$b=4l$ （l は自然数）とおくと，

$a=3m-9l$ （$3m>9l$）　・・・①

$30-c=5m$ について

$30-c=5m$ より，$c=5(6-m)$

c は自然数だから，$m=1,\ 2,\ 3, 4,\ 5$　・・・②

よって，①，②を同時に満たす $m,\ l$ の組は $(m,\ l)=(4,\ 1), (5,\ 1)$

これと $(a,\ b,\ c)=(3m-9l,\ 4l,\ 5(6-m))$ より，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4. 10), (6,\ 4,\ 5)$

$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4. 10)$ のとき

$x,\ y,\ z$ の最大公約数が 60 だから，$a,\ b,\ c$ の最大公約数は 1 である。

$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4. 10)=(3,\ 2^2,\ 2\cdot 5)$ より，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4. 10)$ はこれを満たす。

また，$a,\ b,\ c$ の最小公倍数は $2^2\cdot 3\cdot 5=60$

よって，$x,\ y,\ z$ の最小公倍数＝$x,\ y,\ z$ の最大公約数×60＝60×60＝3600

$(a,\ b,\ c)=(6,\ 4,\ 5)$ のとき

$(a,\ b,\ c)=(6,\ 4,\ 5)=(2\cdot 3,\ 2^2,\ 5)$ より，$a,\ b,\ c$ の最大公約数は 1 である。

よって，$(a,\ b,\ c)=(6,\ 4,\ 5)$ は条件を満たす。

また，$a,\ b,\ c$ の最小公倍数は $2^2\cdot 3\cdot 5=60$

よって，$x,\ y,\ z$ の最小公倍数＝$x,\ y,\ z$ の最大公約数×60＝60×60＝3600

以上より，$x,\ y,\ z$ の最小公倍数は 3600

34

$\sqrt{n^2-9n-1}=m$ とおくと，

$\sqrt{n^2-9n-1}=\sqrt{\left(n-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{85}{4}}$ より，$\left(n-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{85}{4}=m^2$

両辺に 4 を掛けると，$(2n-9)^2-85=4m^2$

$(2n-9)^2-4m^2=85$ より，$\{(2n-9)-2m\}\{(2n-9)+2m\}=85$

すなわち $(2n-2m-9)(2n+2m-9)=85$

また，n は $n^2-9n-1\geq 0$ を満たす自然数だから，

$n^2-9n-1=\left(n-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{85}{4}=\frac{1}{4}\left\{(2n-9)^2-85\right\}$ より，$n\geq 10$

したがって，$2n+2m-9>0$

よって，$(2n-2m-9)(2n+2m-9)=85$ において，$0<2n-2m-9<2n+2m-9$

ゆえに，$(2n-2m-9,\ 2n+2m-9)=(1,\ 85),\ (5,\ 17)$

これを解くと，$(n,\ m)=(26,\ 21),\ (10,\ 3)$

これらは $n\geq 10$ を満たす。

よって，$n=10,\ 26$

35

解法 1

$$
\begin{aligned}
x^2-2xy+3y^2-2x-8y+13&=x^2-2(y+1)x+3y^2-8y+13\\
&=\{x-(y+1)\}^2-(y+1)^2+3y^2-8y+13\\
&=(x-y-1)^2+2(y^2-5y+6)\\
&=(x-y-1)^2+2(y-2)(y-3)
\end{aligned}
$$

よって，$(x-y-1)^2+2(y-2)(y-3)=0$

ここで，$(x-y-1)^2\geq 0$

また，$(y-2)(y-3)$ は連続する 2 つの整数の積だから $(y-2)(y-3)\geq 0$

ゆえに，$x-y-1=0$ かつ $(y-2)(y-3)=0$

すなわち $(x,\ y)=(3,\ 2),\ (4,\ 3)$

解法 2

$x^2-2xy+3y^2-2x-8y+13=x^2-2(y+1)x+3y^2-8y+13$

よって，$x^2-2(y+1)x+3y^2-8y+13=0$

この x についての 2 次方程式の判別式を D とすると，

$\frac{D}{4}=(y+1)^2-(3y^2-8y+13)=-2y^2+10y-12=-2(y-2)(y-3)$

x が整数解をもつためには x が実数解をもつことが，
すなわち $D \geq 0$ であることが必要である。
よって，$(y-2)(y-3) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq y \leq 3$
y は整数だから，$y=2,\ 3$
$y=2$ のとき
$x^2-2(y+1)x+3y^2-8y+13=0$ に $y=2$ を代入すると，
$x^2-6x+9=0$ すなわち $(x-3)^2=0 \quad \therefore x=3$
$y=3$ のとき
$x^2-2(y+1)x+3y^2-8y+13=0$ に $y=3$ を代入すると，
$x^2-8x+16=0$ すなわち $(x-4)^2=0 \quad \therefore x=4$
以上より，求める整数解は $(x,\ y)=(3,\ 2),\ (4,\ 3)$
補足
数学Ⅱで学習する「解と係数の関係」を使うと，
$y=2,\ 3$ のとき $D=0$ より，$x^2-2(y+1)x+3y^2-8y+13=0$ は重解をもつ。
重解を α とすると，解と係数の関係より，$\alpha+\alpha=2(y+1)$ だから，$\alpha=y+1$
よって，$y=2$ のとき $\alpha=3$，$y=3$ のとき $\alpha=4$
ゆえに，求める整数解は $(x,\ y)=(3,\ 2),\ (4,\ 3)$

36

(1)

$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ は abc の倍数で，$(ab-1)(bc-1)(ca-1)>0,\ abc>0$ だから，
適当な自然数 k を用いて，$(ab-1)(bc-1)(ca-1)=kabc$ と表せる。
また，

$$\begin{aligned}(ab-1)(bc-1)(ca-1)&=(ab^2c-ab-bc+1)(ca-1)\\&=a^2b^2c^2-ab^2c-a^2bc+ab-abc^2+bc+ca-1\\&=abc(abc-a-b-c)+ab+bc+ca-1\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}ab+bc+ca-1&=(ab-1)(bc-1)(ca-1)-abc(abc-a-b-c)\\&=kabc-abc(abc-a-b-c)\\&=abc(k+a+b+c-abc)\end{aligned}$$

ゆえに，$ab+bc+ca-1$ は abc で割り切れる。

(2)

解法 1

$ab+bc+ca-1=abc\cdot n$ （n は自然数）　・・・①　とすると，

$1<a<b<c$ より，$ab<ca<bc$ だから，$3bc>3bc-1>ab+bc+ca-1=abc\cdot n$

よって，$3bc>abc\cdot n$　すなわち $an<3$

これと $1<a$ および n が自然数であることから，$a=2,\ n=1$

これらを①に代入すると，$2b+bc+2c-1=2bc$ より，$bc-2b-2c+1=0$

すなわち $(b-2)(c-2)=3$

ここで，$a=2<b<c$ より，$b\geq 3,\ c\geq 4$ だから，$b-2\geq 1,\ c-2\geq 2$

よって，$(b-2,\ c-2)=(1,\ 3)$　すなわち $(b,\ c)=(3,\ 5)$

ゆえに，$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,5)$ のとき $ab+bc+ca-1=abc$ となるから，

$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ は abc で割り切れる。

解法 2

$ab+bc+ca-1=abc\cdot n$ （n は自然数）とすると，

$\dfrac{ab+bc+ca-1}{abc}=n$　すなわち $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{abc}=n$

これと n が自然数であることから，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{abc}\geq 1$　・・・①

また，$1<a<b<c$ より，$0<\dfrac{1}{c^3}<\dfrac{1}{abc}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}<1$

よって，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<\dfrac{3}{a},\ -\dfrac{1}{abc}<-\dfrac{1}{c^3}$ より，$\dfrac{3}{a}-\dfrac{1}{c^3}>\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{abc}\geq 1$

したがって，$\dfrac{3}{a}-\dfrac{1}{c^3}>1$

この不等式の両辺に ac^3 を掛けると $3c^3-a>ac^3$

これを整理すると，$a(c^3+1)<3c^3$ より，$a<\dfrac{3c^3}{c^3+1}=3-\dfrac{3}{c^3+1}$

ここで，$1<a<b<c$ より，$c\geq 4$ だから，$0<\dfrac{3}{c^3+1}<1$　$\therefore 2<3-\dfrac{3}{c^3+1}<3$

ゆえに，$1<a\leq 2$ より，$a=2$

次に，$a=2$ を①に代入すると，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{2bc}\geq 1$ より，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{2bc}\geq\dfrac{1}{2}$

この不等式の両辺に $2bc$ を掛けると，$2c+2b-1\geq bc$ すなわち $bc-2b-2c+1\leq 0$

これと，$bc-2b-2c+1=(b-2)(c-2)-3$ より，$(b-2)(c-2)\leq 3$

また，$a=2<b<c$ より，$b\geq 3,\ c\geq 4$ だから，$b-2\geq 1,\ c-2\geq 2$

よって，$(b-2,\ c-2)=(1,\ 2),\ (1,\ 3)$　すなわち $(b,\ c)=(3,\ 4),\ (3,\ 5)$

ゆえに，$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 5)$

$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 4)$のとき

$(ab-1)(bc-1)(ca-1)=5\cdot 11\cdot 7$，$abc=2\cdot 3\cdot 4$

よって，$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$はabcで割り切れない。

$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3, 5)$のとき

$(ab-1)(bc-1)(ca-1)=5\cdot 14\cdot 9=2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$，$abc=2\cdot 3\cdot 5$

よって，$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$はabcで割り切れる。

以上より，$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3, 5)$

37

(1)

$$
\begin{aligned}
n^3-n&=n(n^2-1)\\
&=n(n-1)(n+1)\\
&=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)
\end{aligned}
$$

より，n^3-nは連続する 3 つの整数の積で表される。

これと連続する 3 つの整数のうちの少なくとも 1 つは偶数すなわち 2 の倍数かつ

1 つは 3 の倍数であることから，その積は 6 の倍数となる。

とくに，nが 3 以上の奇数の場合，

$n=2k+1$（kは自然数）と表せるから，

$$
\begin{aligned}
n^3-n&=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\\
&=2k(2k+1)(2k+2)\\
&=4k(2k+1)(k+1)
\end{aligned}
$$

となり，n^3-nは 4 の倍数である。

ゆえに，nが 3 以上の奇数のとき，n^3-nは 6 の倍数かつ 4 の倍数すなわち 24 の倍数である。

(2)

$m^3n-mn^3=n(m^3-m)-m(n^3-n)$

(1)より，$n^3-n,\ m^3-m$は 6 の倍数だから，m^3n-mn^3は 6 の倍数である。

(3)

解法 1

整数nは$3k-1,\ 3k,\ 3k+1$（kは整数）のいずれかの形で表せる。

$n^9-n^3=n^3(n^3-1)(n^3+1)$において，

$n=3k-1$のとき

$$
\begin{aligned}
n^3+1&=(3k-1)^3+1\\
&=27k^3-27k^2+9k\\
&=9(3k^3-3k^2+k)
\end{aligned}
$$

より，n^3+1が 9 の倍数

よって，n^9-n^3は 9 の倍数

$n=3k$ のとき

$n^3=\left(3k^3\right)$

$=27k^3$

$=9\cdot 3k^3$

より，n^3 が 9 の倍数

よって，n^9-n^3 は 9 の倍数

$n=3k+1$

$n^3-1=(3k+1)^3-1$

$=27k^3+27k^2+9k$

$=9\left(3k^3+3k^2+k\right)$

より，n^3-1 が 9 の倍数

よって，n^9-n^3 は 9 の倍数

以上より，n^9-n^3 は 9 で割り切れる。

解法 2

整数 n を 9 で割った余りは $-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ のうちのいずれかである。

すなわち $n\equiv -4 \pmod 9$，$n\equiv -3 \pmod 9$，$n\equiv -2 \pmod 9$，$n\equiv -1 \pmod 9$，$n\equiv 0 \pmod 9$，$n\equiv 1 \pmod 9$，$n\equiv 2 \pmod 9$，$n\equiv 3 \pmod 9$，$n\equiv 4 \pmod 9$

$n\equiv 0 \pmod 9$ のとき

$n^9\equiv 0 \pmod 9$，$n^3\equiv 0 \pmod 9$ より，$n^9-n^3\equiv 0-0\equiv 0 \pmod 9$

$n\equiv \pm 1 \pmod 9$ のとき

$n^9\equiv (\pm 1)^9\equiv \pm 1 \pmod 9$，$n^3\equiv (\pm 1)^3\equiv \pm 1 \pmod 9$ より，$n^9-n^3\equiv \pm 1-(\pm 1)\equiv 0 \pmod 9$

$n\equiv \pm 2 \pmod 9$ のとき

$n^9\equiv (\pm 2)^9\equiv \left\{(\pm 2)^3\right\}^3\equiv (\pm 8)^3\equiv (\mp 1)^3\equiv \mp 1 \pmod 9$，$n^3\equiv (\pm 2)^3\equiv \pm 8\equiv \mp 1 \pmod 9$ より，

$n^9-n^3\equiv \mp 1-(\mp 1)\equiv 0 \pmod 9$

$n\equiv \pm 3 \pmod 9$ のとき

$n^9\equiv (\pm 3)^9\equiv \left\{(\pm 3)^3\right\}^3\equiv (\pm 27)^3\equiv 0^3\equiv 0 \pmod 9$，$n^3\equiv (\pm 3)^3\equiv \pm 27\equiv 0 \pmod 9$ より，

$n^9-n^3\equiv 0-0\equiv 0 \pmod 9$

$n\equiv \pm 4 \pmod 9$ のとき

$n^9\equiv (\pm 4)^9\equiv \left\{(\pm 4)^3\right\}^3\equiv (\pm 64)^3\equiv (\pm 1)^3\equiv \pm 1 \pmod 9$，$n^3\equiv (\pm 4)^3\equiv \pm 64\equiv \pm 1 \pmod 9$ より，

$n^9-n^3\equiv \pm 1-(\pm 1)\equiv 0 \pmod 9$

以上より，$n^9-n^3\equiv 0 \pmod 9$　すなわち n^9-n^3 は 9 で割り切れる。

38

(1)

解法 1

自然数nを 3 で割った余りは$-1,\ 0,\ 1$のうちのいずれかである。

すなわち$n \equiv -1 \pmod 3$，$n \equiv 0 \pmod 3$，$n \equiv 1 \pmod 3$

自然数nが 3 の倍数のとき

$n \equiv 0 \pmod 3$より，$n^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod 3$

自然数nが 3 の倍数でないとき

$n \equiv \pm 1 \pmod 3$より，$n^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1 \pmod 3$

したがって，自然数$a,\ b,\ c$が$a^2+b^2=c^2$を満たすとき，

$a,\ b$がともに 3 の倍数でないと仮定すると，$a^2+b^2 \equiv 1+1 \equiv 2 \pmod 3$

ところが，$c^2 \equiv 0 \pmod 3$または$c^2 \equiv 1 \pmod 3$より，$a^2+b^2 \neq c^2$となり矛盾

よって，$a,\ b$の少なくとも 1 つは 3 の倍数である。

解法 2

整数nは$3k-1,\ 3k,\ 3k+1$（kは整数）のいずれかの形で表せる。

$n=3k$のとき

$n^2=(3k)^2=9k^2=3\cdot 3k^2$

よって，n^2を 3 で割った余りは 0

$n=3k\pm 1$のとき

$n^2=(3k\pm 1)^2=9k^2\pm 6k+1=3(3k^2\pm 2k)+1$

よって，n^2を 3 で割った余りは 1

したがって，自然数$a,\ b,\ c$が$a^2+b^2=c^2$を満たすとき，

$a,\ b$がともに 3 の倍数でないと仮定すると，

$a^2,\ b^2$を 3 で割った余りはいずれも 1 だから，a^2+b^2を 3 で割った余りは 2

ところがc^2を 3 で割った余りは 0 または 2 だから，$a^2+b^2 \neq c^2$となり矛盾する。

よって，$a,\ b$の少なくとも 1 つは 3 の倍数である。

(2)

解法 1

自然数nを 5 で割った余りは$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$のうちのいずれかである。

すなわち$n \equiv -2 \pmod 5$，$n \equiv -1 \pmod 5$，$n \equiv 0 \pmod 5$，$n \equiv 1 \pmod 5$，$n \equiv 2 \pmod 5$

$n \equiv \pm 1 \pmod 5$のとき

$n^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1 \pmod 5$

$n \equiv \pm 2 \pmod 5$のとき

$n^2 \equiv (\pm 2)^2 \equiv 4 \equiv -1 \pmod 5$

よって，$a,\ b,\ c$のいずれもが 5 の倍数でないと仮定すると，

a^2+b^2を 5 で割った余りは$-2,\ 0,\ 2$のいずれかである。

ところが c^2 を 5 で割った余りは $-1, 1$ のいずれかだから，$a^2+b^2 \neq c^2$ となり矛盾する。
ゆえに，a, b, c の少なくとも 1 つは 5 の倍数である。

解法 2

整数 n は $5k,\ 5k\pm1,\ 5k\pm2$（k は整数）のいずれかの形で表せる。

$n=5k\pm1$ のとき

$$n^2=(5k\pm1)^2=25k^2\pm10k+1=5(5k^2\pm2k)+1$$

よって，n^2 を 5 で割った余りは 1

$n=5k\pm2$ のとき

$$n^2=(5k\pm2)^2=25k^2\pm20k+4=5(5k^2\pm4k+1)-1$$

よって，n^2 を 5 で割った余りは -1

よって，a, b, c のいずれもが 5 の倍数でないと仮定すると，

a^2+b^2 を 5 で割った余りは $-2, 0, 2$ のいずれかである。

ところが c^2 を 5 で割った余りは -1 または 1 だから，$a^2+b^2 \neq c^2$ となり矛盾する。
よって，a, b, c の少なくとも 1 つは 5 の倍数である。

39

解法 1

$$\begin{aligned}f(x)&=ax^2+bx+c\\&=ax^2+(b-3a)x+c+3ax\\&=ax(x+3)+(b-3a)x+c\\&=\frac{2a}{2}\{x(x+1)+2x\}+(b-3a)x+c\\&=2a\cdot\frac{x(x+1)}{2}+2ax+(b-3a)x+c\end{aligned}$$

x が整数ならば $x(x+1)$ は連続する 2 つの整数の積だから 2 の倍数である。

よって，$\dfrac{x(x+1)}{2}$ は整数である。

ゆえに，$2a,\ b-3a,\ c$ がすべて整数であるとき，x が整数ならば $f(x)$ も整数である。

解法 2

$$\begin{aligned}f(x)&=ax^2+bx+c\\&=ax^2+(b-3a)x+c+3ax\\&=ax(x+3)+(b-3a)x+c\end{aligned}$$

よって，$f(x)=ax(x+3)+(b-3a)x+c$

また，x が整数ならば x は $2k,\ 2k-1$（k は整数）のいずれかの形で表せる。

$x=2k$ のとき

$$\begin{aligned}f(2k)&=a\cdot2k(2k+3)+(b-3c)\cdot2k+c\\&=2a\cdot k(2k+3)+2k(b-3c)+c\end{aligned}$$

$2a,\ b-3a,\ c,\ k$ は整数だから，$f(2k)$ は整数である。

$x=2k-1$ のとき

$$\begin{aligned} f(2k-1) &= a(2k-1)\{(2k-1)+3\}+(b-3c)(2k-1)+c \\ &= a(2k-1)(2k+2)+(b-3c)(2k-1)+c \\ &= 2a\cdot(2k-1)(k+1)+(b-3c)(2k-1)+c \end{aligned}$$

$2a,\ b-3a,\ c,\ k$ は整数だから，$f(2k-1)$ は整数である。

以上より，$2a,\ b-3a,\ c$ がすべて整数であるとき，x が整数ならば $f(x)$ も整数である。

解法 3

$2a=m$，$b-3a=n$ （$m,\ n$ は整数）とおくと，

$2a=m$ より，$a=\dfrac{m}{2}$

これと $b-3a=n$ より，$b=\dfrac{3m+2n}{2}$

よって，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{m}{2}x^2+\frac{3m+2n}{2}x+c \\ &= \frac{m}{2}x^2+\frac{m+2(m+n)}{2}x+c \\ &= \frac{m}{2}x^2+\frac{m}{2}x+(m+n)x+c \\ &= \frac{m}{2}\cdot x(x+1)+(m+n)x+c \\ &= m\cdot\frac{x(x+1)}{2}+(m+n)x+c \end{aligned}$$

x が整数ならば $x(x+1)$ は連続する 2 つの整数の積だから 2 の倍数である。

よって，$\dfrac{x(x+1)}{2}$ は整数である。

これと $m,\ n,\ c$ は整数だから，x が整数ならば $f(x)$ は整数である。

ゆえに，$2a,\ b-3a,\ c$ がすべて整数であるとき，x が整数ならば $f(x)$ も整数である。

解法 4

$2a=m$，$b-3a=n$ （$m,\ n$ は整数）とおくと，

$2a=m$ より，$a=\dfrac{m}{2}$

これと $b-3a=n$ より，$b=\dfrac{3m+2n}{2}$

よって，$f(x)=\dfrac{m}{2}x^2+\dfrac{3m+2n}{2}x+c$

x が整数ならば x は $2k,\ 2k-1$ （k は整数）のいずれかの形で表せる。

$x=2k$ のとき

$$f(2k)=\frac{m}{2}\cdot(2k)^2+\frac{3m+2n}{2}\cdot 2k+c$$
$$=2mk^2+(3m+2n)k+c$$

$m,\ n,\ k,\ c$ は整数だから，$f(2k)$ は整数である。

$x=2k-1$ のとき

$$f(2k-1)=\frac{m}{2}\cdot(2k-1)^2+\frac{3m+2n}{2}\cdot(2k-1)+c$$
$$=\frac{m(4k^2-4k+1)}{2}+\frac{(3m+2n)(2k-1)}{2}+c$$
$$=\frac{4mk^2-4mk+m+6mk-3m+4nk-2n}{2}+c$$
$$=\frac{4mk^2+(2m+4n)k-2m-2n}{2}+c$$
$$=2mk^2+(m+2n)k-m-n+c$$

$m,\ n,\ k,\ c$ は整数だから，$f(2k-1)$ は整数である。

以上より，$2a,\ b-3a,\ c$ がすべて整数であるとき，x が整数ならば $f(x)$ も整数である。